MAI 3 - domácí úkol ze 3. cvičení

Promyslete a „sepište" řešení aspoň jednoho z následujících problémů:

1. a) Promyslete, co „znamená" v prostoru $C[a,b]$ (prostor funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a,b]$) s metrikou $d_{\max}(f,g)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ konvergence posloupnosti $\{f_n\}$.

   Platí : $\lim f_n = f$ v $C[a,b] \Leftrightarrow \forall x\in[a,b] : \lim f_n(x)=f(x)$?

   b) Promyslete totéž pro prostor funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a,b]$ c metrikou

   $$d(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \ .$$

2. Buď M množina všech posloupností reálných čísel $x=\{x_n\}$, pro které $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konverguje.

   Ukažte, že $d_2(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$, $x,y\in M$, $x=\{x_n\}$, $y=\{y_n\}$ má vlastnosti metriky

   (pro tento metrický prostor se užívá se označení ((l^2,d_2) .

3. Buď (M,d) metrický prostor, $\{x_n\}$, $\{x_n^*\}$, $\{y_n\}$, $\{y_n^*\}$ posloupnosti v (M,d). Dokažte (nebo ukažte, že neplatí):

   a) Jsou-li posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ cauchyovské, je posloupnost $\{d(x_n,y_n)\}$ konvergentní.

   b) Nechť jsou posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ cauchyovské a pro posloupnosti $\{x_n^*\}$, $\{y_n^*\}$ platí $\lim d(x_n,x_n^*)=0$ a $\lim d(y_n,y_n^*)=0$. Pak i posloupnosti $\{x_n^*\}$, $\{y_n^*\}$ jsou cauchyovské a $\lim d(x_n,y_n)=\lim d(x_n^*,y_n^*)$.

4. Úloha 11. z přednášky 2 pana docenta Klazara..

5. Úloha 4. z přednášky 3 pana docenta Klazara.